Leçon 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

RM

2022-2023

On se place sur E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et sauf mention contraire une fonction f de E dans $\mathbb{R}$.

1 Existences et unicités d'extremums

Définition 1 : Soient X une partie d'un espace normé E sur $\mathbb{R}$, a un point de X, et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. On dit que f admet en a un maximum global si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in X$ et un maximum locale s'il existe un voisinage V de a dans e tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in X \cap V$.
On dit que le maximum est strict si les inégalités sont strictes et on parle de minimum en renversant les inégalités.
Le terme d'extremum signifie maximum ou minimum.

Remarque 2 : La recherche d'extremum est souvent désignée par le mot, plus vendeur évidemment, d'optimisation.

Définition 3 : On considère le problème d'optimisation de minimiser f sur X. On cherche donc $\inf\{f(x)|x \in X\}$. Sous réserve d'existence de cette borne inférieur $f^\star$, on appelle suite minimisante une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tel que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f^\star$.

Remarque/Exemple 4 : On utilise souvent la propriété de borne inférieur et supérieur sur $\mathbb{R}$ si l'ensemble est minoré ou majoré. Par exemple, quand on recherche une minimisation de la distance, on a que l'ensemble est minoré par 0 et donc on est assuré de l'existence d'une borne inférieur.

Théorème 5 : Si la borne inférieur existe, il existe toujours des suites minimisantes.

1.1 Utilisation de la compacité

Proposition 6 : Soit $X \subset E$ une partie compact de E et $f : X \to \mathbb{R}$. Si f est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Contre-exemple 7 : La notion de compacité est importante. Sur $\mathbb{R}$, la fonction *Arctan* est bornée mais n'atteint pas ses bornes.

Application 8 : Soient K_1, K_2 deux compactes de E. Alors ils existent $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tels que $d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2) = \inf_{x\in K_1, y\in K_2} d(x, y)$.

Application 9 : Soit $f : X \to X$ où X un compact de E tel que $\forall (x, y) \in X^2, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Alors f admet un unique point fixe.

1.2 Utilisation de la convexité

Définition 10 : • On dit qu'une partie X de E est convexe si pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in [0, 1]$, alors $\lambda x + (1 - \lambda)y$ est encore dans X.
• On dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.
Elle est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte.

Exemple 11 : Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont convexes. L'application norme $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ est convexe.

Proposition 12 : Soit $f : C \to \mathbb{R}$ avec C convexe et f une fonction convexe. Alors l'ensemble des points réalisant le minimum de f est un convexe. Si f est strictement convexe, alors il existe au plus un point $\overline{x} \in C$ minimisant f sur C.

Exemple 13 : Ceci n'assure pas l'existence d'un minimum. Par exemple, le fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ est strictement convexe mais n'admet aucun minimum.

Application 14 : Soient $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien, b un vecteur de E et u un endomorphisme symétrique défini positif. Alors l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}\langle u(x), x\rangle + \langle b, x\rangle$ admet un unique point minimum sur E.

1.3 Dans un Hilbert

Soit H un espace de Hilbert.

Théorème (de projection) 15 : Soit C une partie convexe et fermé non-vide de H. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C)$. On dit que $y = p_C(x)$ est la projection de x sur C. Il est caractérisé par la propriété : $y \in C$ et $Re(\langle x - y, z - y\rangle \leq 0, \forall z \in C$.

Application (de représentation de Riesz) 16 : Pour tout forme linéaire $\varphi \in H^*$, il existe un unique $y \in H$ tel que $\varphi(x) = \langle x, y\rangle$ pour tout $x \in H$.

Corollaire 17 : Si F est sous-espace vectoriel fermé de H, alors l'application $p_F : H \to F$ est une application linéaire continue, et $p_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que $y \in F$ et $x - y \in f$. On a alors $H = F \bigoplus F^\perp$.

Définition 18 : On dit que $f : E \to \mathbb{R}$ est coercive si $\lim_{\|x\| \to +\infty, x \in X} f(x) = +\infty$.

Développement 19 : Soient H un espace de Hilbert et $J : H \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe continue et coercive, alors il existe $a \in H$ tel que :

$$J(a) = \inf_H J.$$

Dev 1

Théorème (Lax-Milgram) 20 : Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H^*$ une forme linéaire, il existe un unique $u \in H$ tel que $a(u, v) \geq \varphi(v), \forall v \in K$. De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in K}\{\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)\}.$$

Remarque 21 : Ce théorème est un outil fondamental dans l'étude de certaines équations aux dérivées partielles.

1.4 En analyse complexe

Théorème (principe du maximum globale) 22 : Soit Ω un ouvert connexe et borné dans $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe sur Ω. Alors $|f|$ atteint son maximum sur la frontière $\partial\Omega$ et si elle atteint son maximum, alors elle est constante sur Ω.

Corollaire (Théorème de Liouville) 23 : Toute fonction entière bornée est constante.

Application (Théorème de d'Alembert-Gauss) 24 : Le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

2 Extremum et calcul différentielle

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$.

2.1 Condition du premier ordre

Définition 25 : On dit que f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ s'il existe une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a+h) = f(a) + l(h) + o(\|h\|)$ quand h tends vers 0. L'application l est unique et est appelé la différentielle de f en a, noté $df(a)$.

Définition 26 : Les points $x \in \mathcal{U}$ où $df(x) = 0$ s'appellent les points critiques de f.

Lemme 27 : Si x^* est un minimum locale de $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et si f est différentiable en x^*, alors $df(x^*) = 0$. Autrement dit x^* est un point critique.

Remarque 28 : Ceci est évidemment une condition nécessaire mais pas suffisant. La fonction $t \mapsto t^3$ sur $\mathbb{R}$ à ça dérivé nulle en $t = 0$ mais ce n'est pas un minimum de la fonction.

Exemple 29 : On trouve que le minimum de l'application 14 est $x^* = -u^{-1}(b)$.

Théorème (de Rolle) 30 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ telle que $f'(c) = 0$.

Proposition (Inégalité d'Euler) 31 : Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de E, C un convexe inclus dans $\mathcal{U}$ et f de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$. Si f admet un minimum locale en $x^* \in C$ et si elle est différentiable en x^*, alors $df(x^*).(y - x^*) \geq 0$ pour tout $y \in C$.

Proposition 32 : Si $\mathcal{U}$ est de plus convexe et que f est convexe différentiable, alors chaque point critique de f est un minimum globale.

Développement 33 : Soient A, B, C trois points non alignés du plan euclidien $\mathbb{R}^2$; on suppose les trois angles du triangle ABC strictement inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$. Soit f la fonction qui à un point M associe la somme des distances $f(M) = AM + MB + MC$.
Alors f admet un minimum en un point P, intérieurs strictement à ABC.
De plus, ce minimum est global strict et les angles $\widehat{APB}, \widehat{BPC}$ et $\widehat{CPA}$ sont égaux à $\frac{2\pi}{3}$.

Dev 2

2.2 Condition du deuxième ordre

Lemme 34 : Supposons que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ deux fois différentiables en $x^* \in \mathcal{U}$. Si $df(x^*) = 0$, alors :

- Si x^* est un minimum locale de f, la forme quadratique $d^2f(x^*)$ est positive.
- Si $d^2f(x^*)$ est définie positive, x^* est un minimum locale stricte de f.

Remarque 35 :Les réciproques sont fausses. Pour le premier point, la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^3$ admet l'origine en point critique, sa hessienne est positive à l'origine, mais l'origine n'est pas un minimum locale de f.
Pour le deuxième point, la fonction $g : (x,y) \to x^2 + y^4$ à un minimum strict à l'origine mais sa hessienne n'est pas définie positive.

2.3 Extremas liés

Théorème 36 : Soient $g_1, ..., g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $C = \{x \in \mathbb{R}^n, g_1(x) = 0, ..., g_m(x) = 0\}$. Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de E contenant C et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Si x^* est un extremum local de f dans C, si f est différentiable en x^* et si les différentielles $dg_1(x^*), ..., dg_m(x^*)$ sont linéairement indépendants, alors il existe $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$df(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i dg_i(x^*) = 0.$$

Contre-exemple 37 : L'hypothèse d'indépendances linéaires est importantes. Si on prends la fonction $f(x, y) = x + y^2$ que l'on minimise sous la contrainte $g(x, y) = x^3 - y^2 = 0$, alors l'origine est le minimum globale. Mais on a $dg(0, 0) = 0$ et $df(0, 0) \neq 0$.

Application (Théorème spectral) 38 : Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors il existe une base orthonormée de E formé de vecteurs propres de u. On pose les applications différentiables $f : x \in E \mapsto \langle u(x), x\rangle$ et $g : x \in E \mapsto \|x\|^2$. En considérant $S = \{x \in E | g(x) = 1\}$ la sphère unité qui est compact, on trouve un maximum sur S et le théorème nous fournit une valeur propre.

3 Algorithmes d'optimisation numérique

3.1 Méthode de Newton

Proposition 39 : Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, ne s'annulant qu'une fois sur $[c, d]$. On pose alors la suite récurrente suivante : $x_0 \in [c, d]$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors en notant a l'unique zéro de f, on a :

- Il existe $\alpha > 0$ tel que si $x_0 \in [a - \alpha, a + \alpha]$, alors la suite (x_n) converge de manière quadratique vers a : il existe $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$.
- Si de plus f est strictement convexe avec $f'(a) > 0$, alors pour $x_0 \in]a, d]$, la suite (x_n) est strictement décroissante et converge vers le point a.

Remarque 40 : On peut même utiliser la méthode de Newton pour trouver des minimum. Si $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ est strictement convexe et de classe $\mathcal{C}^3$, alors on peut trouver son minimum en appliquant la méthode de Newton à la fonction $f = g'$.

Exemple 41 : On fixe $y > 0$ et on prends $f(x) = x^2 - y$. Alors la méthode de Newton nous permet d'approcher $\sqrt{y}$.

3.2 Méthode du gradient

Définition 42 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable admettant un unique minimum x^*. On cherche à résoudre $\inf\{f(x) | x \in \mathbb{R}^n\}$. On va pour cela construire une suite $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = x_n + t_n d_n$. On itère alors cette suite jusqu'à avoir x_N suffisamment proche de x^*. On appelle d_n la direction de descente et t_n le pas de descente.

Proposition 43 : La méthode su gradient consiste à choisir la direction $d_n = -\nabla f(x_n)$. Ce choix est motivé par le fait que $-\nabla f(x)$ est la direction de la plus forte décroissance locale. On obtient :

- La méthode du gradient à pas constant si l'on peut prendre $t_n = 1$.
- La méthode du gradient à pas optimal si l'on peut prendre t_n tel que $f(x_n + t_n d_n) = \min_{t \geq 0} f(x_n + t d_n)$. Sous de bonnes hypothèses, ces méthodes convergent, ie x_n tends vers x^*.

Remarque 44 : La convergence est plutôt lente, car ici on ne retient que l'information du premier ordre. Pour être plus performant, on pourrait prendre en compte l'information du second ordre ou en utilisant les itérés précédents.

Références :

1. Analyse Gourdon
2. Cours d'analyse fonctionnelle Li
3. Objectif agrégation Beck
4. Calcul différentielle Rouvière
5. isenmann (rip)